Analiza funkcjonalna
Lista 5 (Wyznaczanie normy operatorów)

Zad 1. Niech $K \in L_2([0,1]\times[0,1])$. Udowodnić, że operator $T : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ zdefiniowany wzorem
$$(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt$$
jest operatorem ciągłym.

Zad 2. Niech $D(A) = \{x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty}(nx(n))^2 < \infty\}$ będzie podprzestrzenią ℓ_2. Czy operator liniowy $A : D(A) \to \ell_2$ zadany wzorem
$$A(x(1), x(2), ...) = (x(1), 2x(2), 3x(3), ...)$$
jest operatorem ciągły?

Zad 3. Wyznacz normę operatora $A : \ell_p \to \ell_p$, $p \in [1,\infty]$, zadanego wzorem

a) $Ax = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
b) $Ax = (x(1), x(3), x(5), x(7), ...)$
c) $Ax = (x(2), x(3), x(4), ...)$
d) $Ax = (\frac{1}{3}x(1), \frac{1}{3^2}x(2), ..., \frac{1}{3^n}x(n), ...)$
e) $Ax = (2x(1), \frac{9}{4}x(2), ..., (\frac{n+1}{n})^n x(n), ...)$

Zad 4. Wyznaczyć normę funkcjonału $Tx = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i)$ określonego na przestrzeni ciągłych funkcji rzeczywistych $C[a,b]$; $c_i \in \mathbb{R}$, $t_i \in [a,b]$. Rozważyć przypadek, gdy $C[a,b]$ jest przestrzenią ciągłych funkcji zespolonych; $c_i \in \mathbb{C}$, $t_i \in [a,b]$.

Zad 5. Wyznaczyć normę operatora liniowego $A : C[a,b] \to C[a,b]$ zadanego formułą $(Ax)(t) = tx(t)$, dla $x \in C[a,b]$.

Zad 6. Wyznaczyć normę funkcjonału $Tx = \int_{-1}^{1} tx(t)dt$ w przestrzeni X, gdy

a) $X = C[-1,1]$,
b) $X = L_p[-1,1]$, dla $p \in [1,\infty]$.

Zad 7. Wyznaczyć normę operatora $(Ax)(t) = tx(t)$, gdy

a) $A : C[-1,1] \to L_p[-1,1]$, $p \in [1,\infty)$,
b) $A : L_p[-1,1] \to L_1[-1,1]$, $p \in [1,\infty)$.

Zad 8. Wyznaczyć normę operatora $A : X \to Y$ danego wzorem $(Ax)(t) = \int_0^t x(t)$, gdy

a) $X = L_1[0,1]$, $Y = C[0,1]$,
b) $X = Y = L_1[0,1]$,
c) $X = Y = C[0,1]$,
d) $X = C[0,1]$, $Y = C^{(1)}[0,1]$.

Zad 9. Pokazać, że operator $A : X \to Y$ jest ograniczonym operatorem liniowym i obliczyć jego normę.

	X	Y	A
a)	ℓ_3	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)t^k}{2^k}$
b)	$L_2[-1,1]$	ℓ_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} tx(t)dt, ..., \frac{1}{3^k}\int_{-1}^{1} t^k x(t)dt, ...\right)$
c)	$C[-1,1]$	ℓ_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} tx(t)dt, ..., \frac{1}{3^k}\int_{-1}^{1} t^k x(t)dt, ...\right)$
d)	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(t^2+1)$
e)	$C[-17,30]$	$L_{\frac{5}{2}}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+s)x(\sqrt{s})\,ds + 3x(0)$
f)	ℓ_2	c	$Ax = \left(x(1), \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, \frac{x(4)}{4}, ...\right)$